Topologia
Lista 4

Zad 1. Wyznaczyć topologię w T_1-przestrzeni X wiedząc, że $|X| < \infty$.

Zad 2. Niech $i, j = 1, 2, 3, 4$, oraz $i < j$. Podać przykład T_i-przestrzeni niebędącej T_j-przestrzenią.
Wskazówska. Rozpatrzyć następujące przestrzenie topologiczne (X, τ):

- $X = \mathbb{N}$ wraz z topologią τ opisaną w zadaniu 7a) z listy 0.
- $X = \mathbb{R}$ wraz z topologią zdefiniowaną przez bazę otoczeń $\{\mathcal{B}(x)\}_{x\in X}$, gdzie
$$\mathcal{B}(x) = \{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) : \varepsilon > 0\} \qquad \text{dla } x \neq 0,$$
$$\mathcal{B}(0) = \{(-\varepsilon, +\varepsilon) \setminus Z : \varepsilon > 0\} \qquad \text{dla } x = 0,$$
$Z = \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \dots$.
- *płaszczyznę Niemyckiego.*

Zad 3. Pokazać, że na prostej euklidesowej funkcja $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 2 \\ 2, & x \geq 2 \end{cases}$, jest nieciągła.

Zad 4. Wyznaczyć wszystkie funkcje ciągłe

a) z przestrzeni dyskretnej w dowolną przestrzeń topologiczną,

b) z przestrzeni antydyskretnej w dowolną T_1-przestrzeń,

c) z przestrzeni $(\mathbb{N}, \tau)$, gdzie τ jest topologią opisaną w zadaniu 7a) z listy 0, w prostą euklidesową $\mathbb{R}$,

d) z prostej euklidesowej $\mathbb{R}$ w skończoną T_1-przestrzeń.

Zad 5. Wykazać, że przeciwobraz zbioru F_σ (odpowiednio G_δ) przy odwzorowaniu ciągłym jest zbiorem F_σ (odpowiednio G_δ).

Zad 6. Niech (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) będą przestrzeniami metrycznymi. Wykazać, że odwzorowanie $f : X \to Y$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu $x \in X$ zachodzi warunek
$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{y\in X}\ \rho_X(x, y) < \delta \Longrightarrow \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Zad 7. Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną. Odległością punktu $x \in X$ od zbioru $A \subset X$ nazywamy liczbę
$$\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, a) : a \in A\}.$$
Udowodnić, że przy ustalonym A funkcja ρ_A określona wzorem $\rho_A(x) = \rho(x, A)$ jest ciągła.

Zad 8. Pokazać, że każda przestrzeń metryczna jest T_4-przestrzenią.